Resumen

1. **Integral por partes:**

El **método de integración por partes** permite calcular la **integral de un producto** de dos funciones aplicando la **fórmula**:

$$\int u * v * dx = u * v - \int v * dx$$

a. Las funciones logarítmicas “ln”,”log”, "arcos" y polinómicas se eligen como ***u***.
b. Las funciones exponenciales “$\mathbf{e^x}$” y trigonométricas del tipo seno y coseno, se eligen como v.

Caso 1

- En este primer caso aplicamos la fórmula directamente, tomando la x como u.

$$\int x \cos x \, dx$$

Caso 2

- Si al integrar por partes tenemos un polinomio de grado n, lo tomamos como u y se repite el proceso n veces.

$$\int x^3 e^x dx$$

2. **Integrales racionales (Fracciones Simples)**

En las **integrales racionales** suponemos que el grado del **numerador** es menor que del **denominador**, si no fuera así se dividiría.

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int C(x) dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)} dx$$

- Una vez que sabemos que el **denominador** tiene mayor grado que **numerador**, descomponemos el denominador en factores.($\frac{N}{D}$)
- Dependiendo de las raíces del denominador nos encontramos con los siguientes **tipos de integrales racionales**:

Caso 1: Integrales racionales con raíces reales simples

La fracción $\frac{P(x)}{Q(x)}$ puede escribirse así:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)} + \frac{B}{(x-b)} + \frac{C}{(x-c)} \cdots$$

3. **Integrales trigonométricas**
   - ✓ Caso 1: Potencias pares de sen x o cos x

Se aplica el seno y coseno del ángulo mitad: seno y coseno del ángulo mitad

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

- ✓ Caso 2: Potencias impares de sen x o cos x

  Se relacionan el seno y el coseno mediante la fórmula: relación entre el seno y coseno $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

- ✓ Caso 3: Con exponente par e impar

  El exponente **impar** se transforma en uno par y otro impar.

$$\int \text{sen}^5 x \ \cos^2 x \, dx$$

$$\int sen^5 x \ \cos^2 x \, dx = \int sen\, x \ sen^4 x \ \cos^2 x \, dx =$$

- ✓ **Caso 4: Productos de tipo sen(nx) · cos(mx)**
  Se **transforman los productos en sumas**:

$$sen\,A \cdot \cos B = \frac{1}{2}\left[sen\left(A+B\right) + sen\left(A-B\right)\right]$$

$$\cos A \cdot sen\,B = \frac{1}{2}\left[sen\left(A+B\right) - sen\left(A-B\right)\right]$$

$$\cos A \cdot \cos B = \frac{1}{2}\left[\cos\left(A+B\right) + \cos\left(A-B\right)\right]$$

$$sen\,A \cdot sen\,B = -\frac{1}{2}\left[\cos\left(A+B\right) - \cos\left(A-B\right)\right]$$

Ejemplo $\int \text{sen}\, 3x \cos 2x \, dx$

4. Integrales que contienen potencias de secante y tangente

- ✓ La **potencia de la secante es par y positiva** (2n) conservamos un factor de **$\sec^2 x$** y se usa la fórmula $\sec^2 x = 1 + tg^2 x$ para expresar los demás factores en términos de tg x:

$$\int tg^m x \cdot sec^{2n} x \, dx = \int tg^m x \cdot \left(sec^2 x\right)^{n-1} \cdot sec^2 x \, dx = \int tg^m x \cdot \left(1 + tg^2 x\right)^{n-1} \cdot sec^2 x \, dx$$

- ✓ **La potencia de la tangente es impar y positiva (2m+1)** conservamos un factor de sec x·tg x y se usa la fórmula $tg^2 x = \sec^2 x - 1$ para expresar los demás factores en términos de sec x :

$$\int tg^{2m+1} x \cdot sec^n x \, dx = \int \left(tg^2 x\right)^m \cdot \left(sec\, x\right)^{n-1} \cdot sec\, x \cdot tg\, x \, dx = \int \left(sec^2 x - 1\right)^m \cdot \left(sec\, x\right)^{n-1} \cdot sec\, x \cdot tg\, x \, dx$$

- ✓ **La potencia de la tangente es par y positiva (2m) y no hay secante** convertimos un factor $tg^2 x$ en términos de $\sec^2 x$. Se desarrolla y se repite si es necesario:

$$\int tg^{2m} x \, dx = \int tg^{2m-2} \cdot tg^2 x \, dx = \int tg^{2m-2} \cdot \left(sec^2 x - 1\right) dx = \int tg^{2m-2} \cdot sec^2 x \, dx - \int tg^{2m-2} \, dx$$

- ✓ **La potencia de la secante es impar y positiva (2n+1) y no hay tangente se resuelve por partes:**

Integrales trigonométricas

LAS IDENTIDADES que se utilizan en la resolución de las integrales trigonométricas de este capítulo son las siguientes:

1. $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$
2. $1 + \operatorname{tag}^2 x = \sec^2 x$
3. $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$
4. $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$
5. $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$
6. $\operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x$
7. $\operatorname{sen} x \cos y = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(x - y) + \operatorname{sen}(x + y)]$
8. $\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = \frac{1}{2}[\cos(x - y) - \cos(x + y)]$
9. $\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x - y) + \cos(x + y)]$
10. $1 - \cos x = 2\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}x$
11. $1 + \cos x = 2\cos^2 \frac{1}{2}x$
12. $1 \pm \operatorname{sen} x = 1 \pm \cos(\frac{1}{2}\pi - x)$

Cambios de variable trigonométricos

UN INTEGRANDO, que sea de una de las formas, $\sqrt{a^2 - b^2u^2}$, $\sqrt{a^2 + b^2u^2}$ o $\sqrt{b^2u^2 - a^2}$, se puede transformar, si no contiene otro factor irracional, en otro formado a base de funciones trigonométricas de una nueva variable, efectuando los cambios siguientes:

Para	hacer el cambio	para obtener
$\sqrt{a^2 - b^2u^2}$	$u = \frac{a}{b}\operatorname{sen} z$	$a\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 z} = a\cos z$
$\sqrt{a^2 + b^2u^2}$	$u = \frac{a}{b}\operatorname{tag} z$	$a\sqrt{1 + \operatorname{tag}^2 z} = a\sec z$
$\sqrt{b^2u^2 - a^2}$	$u = \frac{a}{b}\sec z$	$a\sqrt{\sec^2 z - 1} = a\operatorname{tag} z$

En cada caso, la integración conduce a una expresión en función de la variable z. Para obtener la solución correspondiente en función de la variable original no hay más que deshacer el cambio, es decir tener en cuenta las relaciones pitagóricas en todo triángulo rectángulo, como se indica en los problemas resueltos.

1. **Calcular** $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4 + x^2}}$.

Haciendo $x = 2\operatorname{tag} z$; **tendremos** $dx = 2\sec^2 z\, dz$ **y** $\sqrt{4 + x^2} = 2\sec z$.

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}} = \int \frac{2\sec^2 z\, dz}{(4\operatorname{tag}^2 z)(2\sec z)} = \frac{1}{4}\int \frac{\sec z}{\operatorname{tag}^2 z}\, dz$$

$$= \frac{1}{4}\int \operatorname{sen}^{-2} z \cos z\, dz = -\frac{1}{4\operatorname{sen} z} + C = -\frac{\sqrt{4+x^2}}{4x}$$

2. **Calcular** $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 4}}\, dx$.

Haciendo $x = 2\sec z$; **tendremos** $dx = 2\sec z\operatorname{tag} z\, dz$ **y** $\sqrt{x^2 - 4} = 2\operatorname{tag} z$.

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}\, dx = \int \frac{4\sec^2 z}{2\operatorname{tag} z}(2\sec z\operatorname{tag} z\, dz) = 4\int \sec^3 z\, dz$$

$$= 2\sec z\operatorname{tag} z + 2\ln|\sec z + \operatorname{tag} z| + C'$$

$$= \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-4} + 2\ln|x + \sqrt{x^2-4}| + C$$

3. **Calcular** $\int \frac{\sqrt{9 - 4x^2}}{x}\, dx$.